

Module de Maths, (durée 1h)

Partiel déc 2024 (Rendre le sujet avec la copie)

Calculatrices autorisées, une feuille A4 de notes de cours autorisée.

Exercice 1

- Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x) = 3xe^{-\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + 1}$ sur \mathbb{R}
- Choisir 2 fonctions parmi les 3 suivantes qui sont définies sur \mathbb{R}^2 et étudier si il existe des points critiques. Si oui, préciser leurs natures. [*Bonus si vous traitez les 3*]

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y^2 - x^2 - 2x(y + 1), \\ g(x, y) &= e^{xy}(xy - 1) + y(y - 4), \\ h(x, y) &= x^4y^4 - x^4 - y^4 + 1. \end{aligned}$$

- Soit $h(x, y) = x^2 + 9y^2 - 2x + 24y + 18$
 - Déterminez le point critique et sa nature.
 - En écrivant h comme "somme de deux carrés et d'une constante", retrouver le résultat de question précédente. Par cette approche, peut on conclure que c'est un extremum global ?
- Déterminer $\min_{\substack{xy=25 \\ x>0, y>0}} x + y$.
 - Une entreprise vend des produits de type A et B en quantité respective x et y . On suppose que les ventes de ces produits varient de manière inversement proportionnelles, de sorte que le produit des quantités vaille toujours 25. [*Si une grande quantité de produits A est vendue, il se vendra peu de produit B, et inversement.*] Quel nombre de ventes globales peut on espérer au minimum ?
- Une entreprise fabrique deux types de boissons, les boissons X et Y. Le boisson X, la plus abordable, se vend à 1 euro/ m^3 . Quant à la boisson Y, beaucoup plus sophistiquée, elle se vend à 3 euros/ m^3 . Le coût de fabrication, exprimé en euros, est donné par la fonction suivante :

$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000.$$

où x est le volume (en m^3) de la boisson X et y celui de la boisson Y. On suppose que toutes les boissons sorties de l'usine sont écoulées sur le marché.

- Pour $x, y \geq 0$, déterminer le profit $P(x, y)$ réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu $x m^3$ de X et $y m^3$ de Y.
- Calculer le profit si l'on produit seulement $1m^3$ de chaque boisson.

- (c) La capacité de production de l'entreprise est au total de $20 m^3$ par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition optimale entre les boissons de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien. Calculer dans ce cas le profit réalisé.
- (d) Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en produisant autrement. Pouvez-vous aider le conseil d'administration ?
6. En expliquant votre démarche et à l'aide d'un "dessin", déterminer

$$\begin{aligned} \max \quad & x + y \\ & x, y \geq 0 \\ & x + 3y \leq 9 \\ & x + 2y \leq 4 \end{aligned}$$

Un livre de maths est le seul endroit, où il est normal d'acheter 53 melons et 47 clous, et de demander le prix...

